Chapitre 1

Introduction à la commande optimale

1.1 Introduction

Le problème général de la détermination d'une commande optimale d'un processus peut se résumer comme suit : un procéssus étant donné et défini par son modèle, trouver parmi les commandes admissibles celle qui permet à la fois :

1. De vérifier des conditions initiales et finales données ;
2. De satisfaire diverses contraintes imposées ;
3. D'optimiser un critère choisi.

Sous la forme mathématique, le problème de la commande optimale se résume comme suit :

Soit le système dynamique décrit par l'équation d'état

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t),\, u(t),\, t\right) \tag{1.1}$$

Cette équation est en général non linéaire. De plus le vecteur de commande doit appartenir à un certain ensemble de vecteurs de commandes admissibles

$$u(t) \in U(t) \tag{1.2}$$

Une forme courante de ces contraintes est que les variables de commande ne peuvent dépasser en modules des valeurs imposées.

Dans ces conditions, on désire conduire le système d'un état initial $x(t_0)$ à un état final

$x(t_f)$ tout en minimisant la critère

$$J = \psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi\left(x\left(t\right), u\left(t\right), t\right) dt \tag{1.3}$$

Dans la suite, le coût minimal est noté :

$$J_{\min} = J^*\left(x\right) \tag{1.4}$$

Remarque 1.1

1. *Le temps t peut être absent de f, U et ϕ.*
2. *La durée totale (horizon) $T = t_f - t_0$ du changement d'état peut être imposée ou nom. On distingue les quatre cas suivants :*
   - *Horizon borné et imposé : l'instant final t_f est imposé. La loi de commande optimale dépend alors du temps restant $\tau = t_f - t$.*
   - *Horizon borné, mais non imposé : l'instant final t_f est imposé par une condition supplémentaire intrinsèque au problème.*
   - *Horizon glissant : l'instant restant τ conserve une valeur constante.*
   - *Horizon infini : cas particulier de l'horizon glissant.*
3. *L'état final $x\left(t_f\right)$ peut être imposé ou nom. S'il n'est pas imposé, il doit être défini indirectement par le critère J.*

1.2 Formulation du problème de commande optimale

1.2.1 Mise en équations

Un système dynamique, ou processus, est caractérisé par trois ensembles de variables :

1. Les variables de sortie, en général, sont directement accessibles et regroupées dans un vecteur y de dimension r ;
2. Les variables de commande, regroupées dans un vecteur u de dimension m et dont le choix permet d'agir sur l'évolution du processus ;
3. Les variables internes caractérisant l'état du processus à un instant donné, regroupées dans *un vecteur état* $x\left(t\right)$ de dimension n. L'instant courant est noté $t > 0$.

Dans une modélisation de l'évolution du processus, ces diverses variables sont liées par une équation d'état le plus souvent explicitée sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1.5}$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \tag{1.6}$$

où $x(t) \in \Re^n$, $u \in \Re^m$, $y \in \Re^r$ et $t \in \zeta \subset \Re^+$.

Dans le cas linéaire variants, les relations (1.5) et (1.6) se simplifient sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t)$$
$$y(t) = C(t)\, x(t) + D(t)\, u(t)$$

Dans cette écriture, il vient :

$$A(t) : \zeta \to \Re^{n \times n}$$
$$B(t) : \zeta \to \Re^{n \times m}$$
$$C(t) : \zeta \to \Re^{r \times n}$$
$$D(t) : \zeta \to \Re^{r \times m}$$

Dans le cas invariants, les matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ sont constantes. Notons que le modèle d'état est le plus utilisé pour la synthèse d'une loi de commande optimale sous la forme d'un retour d'état.

1.2.2 Conditions terminales

Les conditions terminales caractérisent à la fois l'état initial, c'est-à-dire l'instant où on commence à agir sur le processus, et l'état final, après action de la commande. Par convention, l'instant initial est noté t_0 et l'état initial $x_0 = x(t_0)$. De même, l'instant final est noté t_f et l'état final $x_f = x(t_f)$. Les conditions initiale et finale x_0 et x_f prises aux instants respectifs t_0 et t_f peuvent être fixées ou non.

Le cas le plus simple correspond à un changement de consigne (par exemple, faire évoluer la pression d'un réservoir d'une valeur $P_0 = P_1$ à la valeur $P_f = P_2$) ou plus généralement à un changement d'état parfaitement défini. Les conditions terminales s'écrivent alors : $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$.

1.3 Choix du critère d'optimalité (critère de performances)

Dans un problème de commande optimale, l'écriture général du critère à minimiser est donné par l'expression suivante :

$$J = \underbrace{\psi\left(x(t_f),\, t_f\right)}_{\text{Partie terminale}} + \int_{t_0}^{t_f} \phi\left(x\left(t\right),\, u\left(t\right),\, t\right) dt \tag{1.7}$$

$\psi\left(x_f,\, t_f\right)$ est appelée partie terminale, permet la prise en compte dans le critère des états finaux. Suivant la forme du critère (1.7), on distingue :

1. Problème de **Mayer** :
$$J = \psi\left(x_f,\, t_f\right) \tag{1.8}$$
2. Problème de **Lagrange** :
$$J = \int_{t_0}^{t_f} \phi\left(x\left(t\right),\, u\left(t\right),\, t\right) dt \tag{1.9}$$
3. Problème de **Bolza** :
$$J = \psi\left(x_f,\, t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} \phi\left(x\left(t\right),\, u\left(t\right),\, t\right) dt \tag{1.10}$$

1.3.1 Principaux critères

L'intérêt de la commande optimale découle de la nature même de sa définition : optimiser un critère de notre choix, tout en satisfaisant des conditions de fonctionnement données et des contraintes imposées.

La solution de certains problème peut s'en trouver simplifiée. Par exemple, si l'on désire que $x\left(t\right)$ s'approche de l'état désiré $x^d\left(t\right)$, on pourra introduire dans l'itégrande $\phi\left(x\left(t\right),\, u\left(t\right),\, t\right)$ du critère un terme tel que $\left(x\left(t\right) - x^d\left(t\right)\right)^T M \ \left(x\left(t\right) - x^d\left(t\right)\right)$, Q étant une matrice symétrique $\left(Q = Q^T\right)$ définie positive ($Q > 0$).

1.3.2 Commande en temps minimum

Conduire le système d'un état initial x_0 à l'état final x_f en minimisant le temps. Comme dans les problèmes de sécurité et la minimisation des coûts liés à la durée ; les applications principales se rencontrent dans les domaines de la production continue, de l'espace, de la défense et de la médecine.

$$\int_{t_0}^{t_f} 1\,dt = t_f - t_0 = T, \quad \phi\left(x\left(t\right),\, u\left(t\right),\, t\right) = 1 \tag{1.11}$$

1.3.3 Commande à énergie minimale

Conduire le système d'un état initial x_0 à l'état final x_f en minimisant l'effort de commande.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[u\left(t\right)\right]^T\ R\,u\left(t\right)\ dt, \quad R = R^T\,;\ R > 0 \tag{1.12}$$

1.3.4 Poursuite

Il s'agit de maintenir l'état $x\left(t\right)$ du système très proche de l'état désiré $x_d\left(t\right)$ dans l'intervalle de temps $[t_0,\, t_f]$.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[x\left(t\right) - x^d\left(t\right)\right]^T\ Q\ \left[x\left(t\right) - x^d\left(t\right)\right]\ dt, \quad Q = Q^T\,;\ Q \geq 0 \tag{1.13}$$

1.3.5 Régulation

C'est un cas particulier de la poursuite, dans ce cas nous avons $x^d\left(t\right) = 0$ avec $t \in [t_0,\, t_f]$.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[x\left(t\right)\right]^T\ Q\,x\left(t\right)\ dt, \quad Q = Q^T\,;\ Q \geq 0 \tag{1.14}$$

A partir de ces critère d'optimisation de base, on peut former d'autres critères à minimiser selon les objectifs désirés.

1.3.6 Poursuite + Commande à énergie minimale

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[x(t) - x^d(t)\right]^T Q \left[x(t) - x^d(t)\right] dt + \int_{t_0}^{t_f} [u(t)]^T R\, u(t)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\left[x(t) - x^d(t)\right]^T Q \left[x(t) - x^d(t)\right] + [u(t)]^T R\, u(t)\right) dt \end{aligned}$$

1.4 Synthèse d'une commande optimale

En résumé la synthèse d'une loi de commande optimale passe par les étapes suivantes :

1. Modélisation du procédé à commander ;
2. Détermination des diverses contraintes à satisfaire (liées à la réalisation de la commande, par exemple accélération limitée, débit borné, réservoir de capacité limitée ; ou liées aux variables caractéristiques, par exemple saturation, la sécurité ; liées aux conditions de départ et l'objectif à atteindre) ;
3. Choix étudié avec soin du critère à minimiser ;
4. Résolution du problème pour déterminer la loi de commande optimale $u^*(t)$;
5. Implémentation de la loi de commande.

Chapitre 2

Calcul des variations

Ce chapitre aborde la résolution d'un problème de commande optimale en utilisant le calcul des variations. L'idée consiste à transformer le problème de commande optimale à un problème de calculs des variations puis on écrit les conditions de stationnarité. Ces dernières sont données sous forme d'un ensemble d'équations différentielles de second ordre. Leur résolution permet de déterminer la commande optimale.

2.1 Calcul des variations

Une fonctionnelle J sur un espace vectoriel V est une application de V dans $\Re$. Par exemple, si $x(t)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[t_0,\, t_f]$, l'application définie par

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} x(t)\, dt \tag{2.1}$$

est une fonctionnelle sur l'espace des fonctions continues sur $[t_0,\, t_f]$.

Si $x(t)$ et $x(t)+\delta x(t)$ sont des fonctions pour lesquelles la fonctionnelle $J(x(t))$ est définie, la variation de $J(x(t))$ notée ΔJ est

$$\Delta J(x(t)) = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)) \tag{2.2}$$

2.2 Recherche l'optimum d'une fonctionnelle

On désire déterminer l'optimum de la fonctionnelle suivante

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)\, dt \tag{2.3}$$

La recherche de cet optimum dépend de la nature de l'état final $x(t_f)$. On suppose que $g \in C^2([t_0,\, t_f])$ et $x(t)$ est une trajectoire optimale.

2.2.1 Etat final fixé

Dans ce cas, le problème est formulé comme suit

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)\, dt \tag{2.4}$$

$$\text{sujet à :} \tag{2.5}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.6}$$

$$x(t_f) = x_f \tag{2.7}$$

Les trajectoires admissibles sont représentées sur la Figure **2.1**. Le calcul de la variation de J donne

$$\Delta J(x(t),\, \delta x(t)) = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t)) \tag{2.8}$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} g(x(t) + \delta x(t),\, \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t),\, t)\, dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)\, dt \tag{2.9}$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} g(x(t) + \delta x(t),\, \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t),\, t) - g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)\, dt \tag{2.10}$$

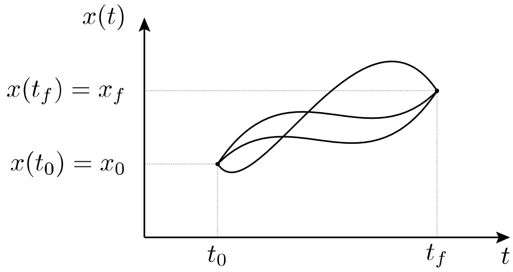

FIGURE 2.1 – Trajectoires admissibles dans le cas d'un état final fixé.

Le développement de Taylor à l'ordre 2 de g autour du point $(x(t),\, \delta x(t))$ donne

$$\Delta J(x(t),\, \delta x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left(g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) + [\delta x(t),\, \delta \dot{x}(t)] \begin{bmatrix} \frac{\partial g(x(t),\dot{x}(t),t)}{\partial x(t)} \\ \frac{\partial g(x(t),\dot{x}(t),t)}{\partial \dot{x}(t)} \end{bmatrix} \right. \tag{2.11}$$

$$\left. + \mathcal{O}(2) - g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) \right) dt \tag{2.12}$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial x(t)} \delta x(t) + \frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial \dot{x}(t)} \delta \dot{x}(t) + \mathcal{O}(2)\, dt \tag{2.13}$$

$$\tag{2.14}$$

L'intégration par partie de second terme donne

$$\int_{t_0}^{t_f} \delta \dot{x}(t) \frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial \dot{x}(t)} dt = \left[\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial \dot{x}(t)} \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial x(t)} \delta x(t)\, dt \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} \Delta J(x(t),\, \delta x(t)) = & \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial x(t)} \right] dt + \left[\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial \dot{x}(t)} \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} \\ & - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial x(t)} \delta x(t)\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{O}(2)\, dt \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} = & \left[\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial \dot{x}(t)} \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial x(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial x(t)} \right) \right] \delta x(t)\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{O}(2)\, dt \end{aligned} \tag{2.17}$$

Pour que $x^*(t)$ soit un optimum alors, la partie linéaire en $\delta x(t)$ doit vérifier

$$\delta J(x(t),\, \delta x(t)) = 0 \tag{2.18}$$

alors

$$\left[\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial \dot{x}(t)} \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial \dot{x}(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial x(t)} \right) \right] \delta x(t)\, dt = 0 \tag{2.19}$$

Comme le premier terme est nulle car $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$. Pour que le second terme soit nulle, d'après le lemme suivant

Lemme 2.1

Si $h(t)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[t_0,\, t_f]$ et si

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t)\,\delta x(t)\,dt = 0 \tag{2.20}$$

pour toute fonction $\delta x(t)$ continue sur $[t_0,\, t_f]$, alors h est identiquement nulle sur $[t_0,\, t_f]$

Par conséquent, on doit imposer

$$\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial \dot{x}(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial x(t)}\right) = 0 \tag{2.21}$$

Cette équation s'appelle équation d'**Euler-Lagrange**.

Ainsi, la solution du problème du calcul des variations (2.4)–(2.7) revient à résoudre l'équation d'**Euler-Lagrange** avec les conditions aux limites

$$\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial \dot{x}(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial x(t)}\right) = 0 \tag{2.22}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.23}$$

$$x(t_f) = t_f \tag{2.24}$$

2.2.2 Etat final libre

Dans ce cas, le problème de calcul des variations est formulée comme suit

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)\,dt \tag{2.25}$$

$$\text{sujet à :} \tag{2.26}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.27}$$

$$x(t_f) \text{ libre} \tag{2.28}$$

La Figure **2.2** donne les trajectoires admissibles dans ce cas. En faisant le même développement que précédemment, on aboutit à la variation (2.19). Pour que cette dernière soit nulle, il faut que les deux termes soit nuls. Pour que le premier terme soit nulle, comme $x(t_0)$ est fixe, alors $\delta x(t_0) = 0$. Mais comme $x(t_f)$ est libre, alors $\delta x(t_f) \neq 0$, alors on doit imposer

$$\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial \dot{x}(t)} = 0 \quad \text{pour} \quad t = t_f \tag{2.29}$$

Pour annuler le deuxième terme, il suffit de vérifier l'équation d'**Euler-Lagrange** (2.21) associée au problème.

En résumé, la résolution du problème de calcul des variations (2.25)–(2.28) revient à résoudre le problème à deux limites suivant

$$\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial \dot{x}(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial x(t)}\right) = 0 \tag{2.30}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.31}$$

$$\left.\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial \dot{x}(t)}\right|_{t)t_f} = 0 \tag{2.32}$$

2.3 Application du calcul des variations à la commande optimale

On considère le problème de la commande optimale suivant

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t),\, u(t),\, t)\, dt \tag{2.33}$$

$$\text{sujet à :} \tag{2.34}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\, u(t),\, t) \tag{2.35}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.36}$$

$$x(t_f) = x_f \text{ ou libre} \tag{2.37}$$

Pour appliquer le calcul des variations pour la résolution de ce problème de commande optimale, on doit d'abord le transformer en un problème de calcul des variations. Ainsi, à partir de l'équation du modèle (2.35), on doit tirer l'expression de la commande $u(t)$ en fonction de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$, ce qui donne

$$u(t) = F(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) \tag{2.38}$$

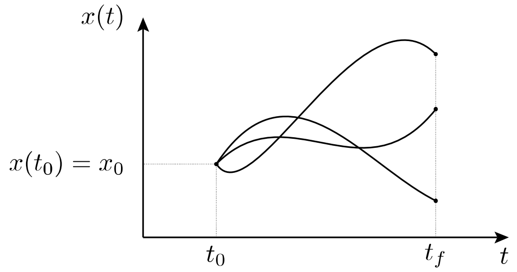

FIGURE 2.2 – Trajectoires admissibles dans le cas d'un état final libre.

puis en substituant cette expression dans le critère à minimiser (2.33), il vient

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\, F(x(t),\, u(t),\, t),\, t)\, dt \tag{2.39}$$

$$\hat{J}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)\, dt \tag{2.40}$$

donc le problème de commande optimale (2.33)–(2.37) se ramène au problème de calcul des variations suivant

$$\hat{J}(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)\, dt \tag{2.41}$$

$$\text{sujet à :} \tag{2.42}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.43}$$

$$x(t_f) = x_f \text{ ou libre} \tag{2.44}$$

Selon la nature de l'état final, on doit résoudre l'équation d'**Euler-Lagrange** avec les conditions aux limites associées pour déterminer la trajectoire optimale $x^*(t)$ (solution du problème de calcul des variations), puis on déduit la loi de commande à partir (2.38) comme suit

$$u^*(t) = F(x^*(t),\, \dot{x}^*(t),\, t) \tag{2.45}$$

2.4 Exemples d'application

Exemple 2.1

Soit le problème de commande optimale suivant

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^2 u^2(t) + 2\, t\, x(t)\, dt \tag{2.46}$$

$$\textit{sujet à :} \tag{2.47}$$

$$\dot{x}(t) = u(t) \tag{2.48}$$

$$x(0) = 1 \tag{2.49}$$

$$x(2) = 5 \tag{2.50}$$

A partir de l'équation d'état, on a $u(t) = \dot{x}(t)$. En remplaçant cette expression de la *commande dans le critère, le problème de commande optimale prend la forme suivante*

$$\min_{x(t)} \hat{J}(x(t)) = \int_0^2 \dot{x}^2(t) + 2\,t\,x(t)\,dt \tag{2.51}$$

sujet à : (2.52)

$$x(0) = 1 \tag{2.53}$$

$$x(2) = 5 \tag{2.54}$$

*qui représente un problème de calcul des variations avec un état final fixe. Pour déterminer la solution de ce problème, on doit résoudre l'équation d'**Euler-Lagrange** avec les conditions aux limites fixées. D'après le problème, on a $g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) = \dot{x}^2(t) + t\,x(t)$, alors l'équation d'**Euler-Lagrange** correspondante est*

$$\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial \dot{x}(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)}{\partial x(t)}\right) = 0 \tag{2.55}$$

$$2\,t - \frac{d}{dt}\,(2\,\dot{x}(t)) = 0 \tag{2.56}$$

$$-t + \ddot{x}(t) = 0 \tag{2.57}$$

La résolution de cette équation différentielle ordinaire donne

$$x(t) = \frac{t^3}{6} + c_1\,t + c_2 \tag{2.58}$$

Pour déterminer les constantes c_1 et c_2, on impose les conditions aux limites, ce qui donne

$$x(0) = c_2 = 1 \tag{2.59}$$

$$x(2) = \frac{4}{3} + 2\,c_1 + 1 = 5 \Rightarrow c_1 = \frac{4}{3} \tag{2.60}$$

La trajectoire optimale est

$$x^*(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{4}{3}\,t + 1 \tag{2.61}$$

et la commande optimale

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{4}{3} \tag{2.62}$$

Exemple 2.2

*On reprend le même exemple mais on considère que l'état final libre. Dans ce cas, on doit résoudre l'équation d'**Euler-Lagrange***

$$\ddot{x}(t) = t \tag{2.63}$$

avec les condition aux limites suivantes

$$x(0) = 1 \tag{2.64}$$

$$\left.\frac{\partial g(x(t),\, \dot{x}(t), t)}{\partial \dot{x}(t)}\right|_{t=2} = 0 \Rightarrow \dot{x}(2) = 0 \tag{2.65}$$

*La solution de l'équation d'**Euler-Lagrange** est*

$$x(t) = \frac{t^3}{6} + c_1\, t + c_2 \tag{2.66}$$

En imposant les condition aux limites, il vient

$$x(0) = c_2 = 1 \tag{2.67}$$

$$\dot{x}(2) = \frac{4}{2} + 2\, c_1 + 1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{3}{2} \tag{2.68}$$

La trajectoire optimale est

$$x^*(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{4}{3}\, t + 1 \tag{2.69}$$

et la commande optimale

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{4}{3} \tag{2.70}$$

Chapitre 3

Principe du minimum de Pontryagin

La méthode de calcul des variations constitue une méthode générale pour l'étude des optimums d'une fonctionnelle. Dans ce chapitre, on présentera une autre méthode élégante facilitant davantage la détermination de la loi de commande optimale. Cette méthode est le principe du minimum de **Pontryagin**. Cette méthode élégante est basée sur le calcul des variations et conduit à une solution générale du problème de commande optimale.

3.1 Problème de commande optimale

Dans ce qui suit, on s'intéresse au problème de commande optimale formulé comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \psi(x(t_f),\, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t,\, u(t),\, t))\, dt \tag{3.1}$$

sujet à :

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\, u(t),\, t) \tag{3.2}$$

qu'on peut écrire

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \psi(x(t_f),\, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t,\, u(t),\, t))\, dt \tag{3.3}$$

sujet à :

$$f(x(t),\, u(t),\, t) - \dot{x}(t) = 0 \tag{3.4}$$

3.2 Principe du minimum

En appliquant la méthode de **Lagrange**, on introduit le vecteur des variables *adjointes* $\lambda(t)$, qui est de même dimension que le vecteur $x(t)$, et le problème de commande optimale se ramène à la résolution du problème suivant :

$$\hat{J}(u(t)) = \psi(x(t_f),\, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t,\, u(t),\, t))\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t)\, [\dot{x}(t) - f(x(t),\, u(t),\, t)]\, dt \quad (3.5)$$

$$= \psi(x(t_f),\, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \phi(x(t,\, u(t),\, t)) + \lambda^T(t)\, [f(x(t),\, u(t),\, t) - \dot{x}(t)]\, dt \quad (3.6)$$

Pour simplifier l'étude de la minimisation de nouveau critère $\hat{J}$, on définit la fonction d'**Hamilton** (appelée aussi **Hamiltonien**) comme duit :

$$H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t),\, t) = \phi(x(t),\, u(t),\, t) + \lambda^T(t)\, f(x(t),\, u(t),\, t) \quad (3.7)$$

et le problème à résoudre prend la forme suivante :

$$\hat{J}(u(t)) = \psi(x(t_f),\, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t),\, t) - \lambda^T(t)\, \dot{x}(t)\right]\, dt \quad (3.8)$$

Par intégration par partie de second terme de l'intégrale, il vient :

$$\hat{J}(u(t)) = \psi(x(t_f),\, t_f)\big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t),\, t)\, dt - \left[\lambda^T(t)\, x(t)\big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T(t)\, x(t)\, dt\right]$$

$$= \psi(x(t_f),\, t_f)\big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t),\, t)\, dt - \lambda^T(t)\, x(t)\big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T(t)\, x(t)\, dt \quad (3.9)$$

$$= \left[\psi(x(t_f),\, t_f) - \lambda^T(t)\, x(t)\right]\big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t),\, t) + \dot{\lambda}^T(t)\, x(t)\right]\, dt \quad (3.10)$$

En utilisant le calcul des variations pour la minimisation du critère $\hat{J}$, il vient

$$\delta\hat{J} = \left(\delta x^T(t)\left[\nabla_{x(t)}\psi(x(t),t) - \lambda(t)\right]\right)\big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left(\delta x^T(t)\, \left[\nabla_{x(t)}H(x(t),\, \lambda_t,\, u(t),\, t) + \dot{\lambda}(t)\right] + \delta u^T(t)\, \nabla_{u(t)}H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t),\, t)\right)\, dt \quad (3.11)$$

Pour déterminer la solution, on doit imposer $\delta \hat{J} = 0$ pour n'importe quelles variations $\delta x(t)$ et $\delta u(t)$ ce qui donne

$$\nabla_{u(t)} H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t),\, t) = 0 \tag{3.12}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\nabla_{x(t)} H(x(t),\, \lambda_t,\, u(t),\, t) \tag{3.13}$$

$$\dot{x}(t) = +\nabla_{\lambda(t)} H(x(t),\, \lambda_t,\, u(t),\, t) \tag{3.14}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\delta x^T(t)\ \left[\nabla_{x(t)} \psi(x(t),\, t) - \lambda(t)\right]\Big|_{t_0}^{t_f} = 0 \tag{3.15}$$

Notons que l'équation (3.12) permet de déterminer l'expression de la loi de commande et les équations (3.14) et (3.13) représentent les conditions de stationnarité ou d'optimalité que la solution doit satisfaire pour quelle soit optimale.

Ainsi, si $x(t_f)$ est libre, d'après (3.15), on doit imposer

$$\lambda(t_f) = \nabla_x(t_f) \psi(x(t_f),\, t_f) \tag{3.16}$$

Pour étudier la nature des solutions, il suffit d'étudier la matrice **Hessienne** suivante

$$\nabla^2_{u(t)} H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t),\, t) \tag{3.17}$$

Dans le cas de l'existence de plusieurs solutions, on doit évaluer le critère pour les différentes solutions trouvées et de prendre celle qui donne une valeur minimale pour le critère.

3.3 Exemple d'application

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)\, dt \tag{3.18}$$

sujet à :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{3.19}$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \tag{3.20}$$

$$x_1(0) = 0 \tag{3.21}$$

$$x_2(0) = 0 \tag{3.22}$$

$$x_1(1) = 4 \tag{3.23}$$

$$x_2(1) = 2 \tag{3.24}$$

La fonction d'**Hamilton** est :

$$H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t),\, t) = \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1(t)\, x_2(t) - \lambda_2(t)\, x_2(t) + \lambda_2(t)\, u(t) \tag{3.25}$$

L'expression de la commande optimale (solution) est :

$$\nabla_{u(t)} H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t), t) = 0 \Rightarrow \tag{3.26}$$

$$u(t) + \lambda_2(t) = 0 \Rightarrow \tag{3.27}$$

$$u(t) = -\lambda_2(t) \tag{3.28}$$

Les conditions de stationnarité sont déterminées comme suit :

$$\dot{x}(t) = \nabla_{\lambda(t)} H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t), t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{\partial H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t), t)}{\partial \lambda_1(t)} \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{\partial H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t), t)}{\partial \lambda_2(t)} \end{cases} \tag{3.29}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\nabla_{\lambda(t)} H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t), t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -\dfrac{\partial H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t), t)}{\partial x_1(t)} \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\dfrac{\partial H(x(t),\, \lambda(t),\, u(t), t)}{\partial x_2(t)} \end{cases} \tag{3.30}$$

ce qui donne

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) \tag{3.31}$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) = -x_2(t) - \lambda_2(t) \tag{3.32}$$
$$\dot{\lambda}_1(t) = 0 \tag{3.33}$$
$$\dot{\lambda}_2(t) = \lambda_2(t) - \lambda_1(t) \tag{3.34}$$
$$\tag{3.35}$$

L'équation (3.33) donne $\lambda_1(t) = c_4$, en substituant cette dernière expression dans (3.34), on obtient :

$$\dot{\lambda}_2(t) = \lambda_2(t) - c_4 \tag{3.36}$$

La solution de cette dernière équation est :

$$\lambda_2(t) = c_3\, e^t + c_4 \tag{3.37}$$

En remplaçant cette solution dans l'équation (3.32), on obtient l'équation suivante :

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) - c_3\, e^t - c_4 \tag{3.38}$$

dont la solution est

$$x_2(t) = -\frac{1}{2} c_4\, e^t - c_3 + c_2\, e^{-t} \tag{3.39}$$

et d'après l'équation (3.31), on a :

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{c_3}{2} e^t - c_4 + c_2\, e^{-t} \tag{3.40}$$

La solution de cette dernière équation est :

$$x_1(t) = -\frac{c_3}{2} e^t - c_4\, t - c_2\, e^{-t} + c_1 \tag{3.41}$$

Pour déterminer les constantes c_1, c_2, c_3 et c_4, on utilise les conditions terminales. Ainsi, pour $t = 0$, on a :

$$x_1(0) = -\frac{c_3}{2} - c_2 + c_1 = 0 \tag{3.42}$$
$$x_2(0) = -\frac{c_4}{2} - c_3 + c_2 = 0 \tag{3.43}$$

et pour $t = 1$

$$x_1(1) = -\frac{c_3}{2}e - c_4 - c_2\, e^{-1} + c_1 = 4 \tag{3.44}$$

$$x_2(1) = -\frac{c_4}{2}e - c_3 + c_2\, e^{-1} = 2 \tag{3.45}$$

Ces équations algébriques peuvent s'écrire sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -e^{-1} & -\frac{e}{2} & -1 \\ 0 & e^{-1} & -1 & -\frac{e}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

dont la solution est :

$$c_1 = 29,7516;\; c_2 = 86,3098;\; c_3 = -56,5582;\; c_4 = 29,7516 \tag{3.47}$$

Par conséquent, la loi de commande optimale est :

$$u^*(t) = -\lambda_2^*(t) = -56,5582\, e^t - 29,7516 \tag{3.48}$$

3.4 Détermination de la commande optimale sous forme d'un retour d'état

La solution générale des équations de **Hamilton-Pontriaguine** contient $2\,n$ constantes arbitraires, qu'il s'agit d'exprimer en fonction de l'état actuel et du temps restant. Commençons par placer l'origine des temps à l'instant : $t = 0$. Si l'état courant $x\,(0)$ est connu par des mesures ou par une estimation, on a ainsi n relations entre les $2\,n$ constantes.

Puisque l'instant présent a été pris comme origine des temps, l'instant final est donné par t_f. On connaît alors, soit $\lambda\,(t_f)$ si l'état final est libre, soit $x\,(t_f)$ si l'état final est imposé. On obtient ainsi n nouvelles relations entre les $2\,n$ constantes.

Ces $2n$ relations permettent de calculer les $2\,n$ constantes en fonction de $x\,(0)$ (état courant) et de t_f. On en déduit la commande optimale $u^*\,(0)$ à l'instant considéré en fonction de $x\,(0)$ et de t_f. Ceci est vrai pour tout instant compris entre 0 et t_f. Pour illustrer cette approche considérons l'exemple ci-après.

Exemple 3.1

Soit le problème de commande optimale suivant :

$$\min J(u(t)) = \int_0^T u^2(t)\, dt$$

sujet à :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \\ x_1(T) &= x_2(T) \end{aligned}$$

En utilisant la méthode du principe du minimum, il vient :

$$\begin{aligned} H(x(t),\, u(t),\, \lambda(t), t) &= u^2(t) + \lambda_1 x_2(t) + \lambda_2\, u(t), \\ \frac{\partial H(x(t),\, u(t),\, \lambda(t), t)}{\partial u(t)} &= 2\, u(t) + \lambda_2(t) = 0 \Rightarrow u^*(t) = -\frac{1}{2}\lambda_2(t) \\ H^*(x(t),\, u(t),\, \lambda(t), t) &= \lambda_1(t)\, x_2(t) - \frac{\lambda_2^2(t)}{4} \end{aligned}$$

Les équations de ***Hamilton-Pontriaguine*** *sont données comme suit :*

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \tag{3.49}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{\lambda_2(t)}{2} = u^*(t), \tag{3.50}$$

$$\dot{\lambda}_1(t) = 0, \tag{3.51}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t) \tag{3.52}$$

L'intégration de ces équations donne

$$\lambda_1(t) = a, \tag{3.53}$$

$$-\lambda_2(t) = a\, t + b = 2\, u^*(t), \tag{3.54}$$

$$2\, x_2(t) = \frac{a}{2} t^2 + b\, t + c, \tag{3.55}$$

$$2\, x_1(t) = \frac{a}{6} t^3 + \frac{b}{2} t^2 + c\, t + d. \tag{3.56}$$

— *Pour $t = 0$, il vient :*

$$2\,u\,(0) = b, \tag{3.57}$$

$$2\,x_2\,(0) = c, \tag{3.58}$$

$$2\,x_1\,(0) = d \tag{3.59}$$

— *Pour $t = T$, on obtient :*

$$0 = 2\,x_2\,(T) = \frac{a}{2}T^2 + b\,T + 2\,x_2\,(0)\,, \tag{3.60}$$

$$0 = 2\,x_1\,(T) = \frac{a}{6}T^3 + \frac{b}{2}T^2 + c\,T + 2\,x_1\,(0) \tag{3.61}$$

Comme $u^*\,(0)$ ne dépend que de b, il suffit d'éliminer a entre les deux dernières équations ce qui donne

$$0 = b\,T^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + 2\,x_2(0)\,\theta\left(\frac{1}{3} - 1\right) - 2\,x_1(0), \tag{3.62}$$

$$0 = -\frac{b}{6}T^2 - \frac{4}{3}T\,x_2(0) - 2\,x_1(0) \tag{3.63}$$

d'où

$$u^*\,(0) = -\frac{6}{T^2}x_1(0) - \frac{4}{T}x_2(0)$$

Notons que chaque instant t peut être assimilé à l'instant initiale, donc la loi de commande optimale est :

$$u^*\,(t) = -\frac{6}{T^2}x_1(t) - \frac{4}{T}x_2(t)$$

Cette loi de commande contient deux facteurs de gain croissant indéfiniment quand le temps tend vers zéro. Pratiquement, on introduit des saturations.

3.5 Résolution numérique des conditions de stationnarité

Les conditions d'optimalité sont, en général, des équations différentielles ordinaires non linéaires. La résolution analytique de ces dernières est possible dans certains cas simples (par exemple dans le cas d'un critère quadratique et un système linéaire). Ainsi, pour déterminer la solution de ces équations des méthodes numériques doivent être utilisées par exemple la méthode de tir.